

《論 文》

3 - 格子について

味 村 良 雄

要 約

正值 2 次格子はさまざまな観点から研究されており、そのひとつとして、与えられた長さ (q とする) をもつベクトルから生成された格子 (q -格子と呼ばれる) の研究がある. 有理整数環や実 2 次体の整数環上の正值 2 - 格子は完全に分類されており [1, 2, 3]、所謂ルート系の話と表裏一体をなす. 虚 2 次体の整数環上の正值エルミート格子についても分類は終わっている [4]. また、実 2 次体の整数環上の正值ノルム 2 や 3 - 格子についても考察されている [5]. ここでは、 $q = 3$ の場合、つまり有理整数環上の 3 - 格子について考察する. この場合、ほとんど結果が知られていないように思われる. まず、3 - 格子の既約分解に関する定理を与え、2 つのタイプの既約 3 - 格子の分類に帰着されることを示す. 次に低次元の既約 3 - 格子の分類を与える. 残念ながら、一般次元についての結果は未だ得られていない.

abstract

A positive definite integral lattice is called a q -lattice if it is generated by some vectors of length q . All 2-lattices are well known (see [1], [2], [3]), but it seems that we know little result when $q > 2$. In this paper we will investigate the decomposition of 3-lattices and study some examples.

1. はじめに

V は有理数体 \mathbb{Q} 上の正值 2 次空間で、その上の対称双 1 次形式を B 、それに対応する 2 次形式を Q とする. V の部分集合 L で、有理整数 \mathbb{Z} 上の有限生

*2005年12月12日受理、2006年 1 月12日掲載決定。

成加群は格子と呼ばれる。とくに、 $B(L, L) \subset \mathbb{Z}$ をみたすとき、整格子と呼ばれる。よく知られているように、 L は \mathbb{Z} 上の基底 x_1, x_2, \dots, x_n をもつ。このとき格子 L に、 $B(x_i, x_j)$ を (i, j) 成分としてもつ $n \times n$ 対称行列 $[B(x_i, x_j)]$ を対応させる。また、格子 L をこの行列で表すこともある。この行列の行列式を格子 L の判別式といい、 $\text{disc}(L)$ と書く。これは基底の取り方によらずに定まる。整格子 L については $\text{disc}(L)$ は正整数である。格子 L がいくつかの格子 L_1, \dots, L_m の（加群としての）直和で、さらに $B(L_i, L_j) = \{0\} (1 \leq i < j \leq m)$ をみたすとき、 L はこれらの格子 L_i たちの直交直和であるといい

$$L = L_1 \perp L_2 \perp \dots \perp L_m$$

と書く。とくに、 $L = L_1 \perp L_2, L_1 \neq \{0\}, L_2 \neq \{0\}$ 、と書くことができるとき、格子 L は可約であるといい、そうでないとき既約であるという。 L が既約な格子 L_1, L_2, \dots, L_m の直交直和であるとき、これを既約直交分解という。[6, 105 : 1] により、格子 L は必ず既約直交分解をもち、その因子の順序を無視すれば一意的である。

正整数 q について、 $Q(x) = q$ となるベクトル $x \in V$ は q -ベクトルと呼ばれる。格子 L に対して

$$L(q) = \{x \in L \mid Q(x) = q\}$$

とおく。正値空間で考えているから、この集合 $L(q)$ は有限集合である。整格子 L が $L(q)$ で生成されているとき、 L は q -格子と呼ばれる。 $q = 1$ つまり (m 次元) 1-格子は

$$I_m \cong I \perp I \perp \dots \perp I, \quad I = \mathbb{Z}e, \quad Q(e) = 1$$

である。2-格子は次の n 次元既約 2-格子たちの直交直和で表される ([1], [2], [3]) :

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$D_n = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{bmatrix}, \quad n = 4, 5, 6, \dots$$

$$E_n = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{bmatrix}, \quad n = 6, 7, 8$$

注 1. $A_3 \cong D_3$. $A_4 \cong E_4$. $D_5 \cong E_5$.

注 2. $\text{disc}(A_n) = n+1$, $\text{disc}(D_n) = 4$, $\text{disc}(E_n) = 9-n$.

以下、3-格子を考える。2-格子を既約直交分解したとき、その因子がすべて上記の既約2-格子になる。しかし、3-格子の既約直交分解では、以下に見るように、その因子はかならずしも3-格子になるとは限らない。実際、1-格子、2-格子、2種類の3-格子が現われる。

2. 3-格子の既約直交分解

格子 L のベクトル x が

$$x = y + z, \quad B(y, z) = 0, \quad y, z \in L, \quad y \neq 0, \quad z \neq 0$$

と書くことができるとき、 x は可約であるといい、そうでないとき x は既約

であるという。また

$$\min(L) = \min\{Q(x) \mid 0 \neq x \in L\}$$

とおく。 L の最小値という。上の分解において $Q(x) = Q(y) + Q(z)$ であるから、 $\min(L) = 2$ のとき $Q(x) \leq 3$ をみたすベクトル $x \in L$ は既約であり、 $\min(L) = 3$ のとき $Q(x) \leq 5$ をみたすベクトル $x \in L$ は既約である。

命題 1. $L = L_1 \perp L_2$ で $\min(L) \geq 2$ とする。このとき、 L が 3-格子であることと、 L_1 と L_2 が 3-格子であることは同値である。

証明. L は 3-格子とする。 $\min(L) \geq 2$ であるから 3-ベクトルは既約である。ゆえに $L(3) = L_1(3) \cup L_2(3)$ となる。 L_1 の任意のベクトル x は (L のベクトルでもあるから) $x = \sum y_i + \sum z_j$ ($y_i \in L_1(3), z_j \in L_2(3)$) と書くことができる。直和性から $x = \sum y_i$ となり、 L_1 は 3-格子である。 L_2 についても同様である。逆は明らか。

次に、 $\min(L) = 1$ の場合を考えよう。任意の $e \in L(1)$ に対して $L = \mathbb{Z}e \perp L'$ ($\mathbb{Z}e \cong [1]$) と直交直和分解する。したがって

$$L = I_r \perp L', \min(L') \geq 2, I_r = \mathbb{Z}e_1 \perp \cdots \perp \mathbb{Z}e_r, Q(e_k) = 1 \ (k = 1, \dots, r)$$

と仮定する。

命題 2. $r = 1$ または $r = 2$ とする。このとき、 L が 3-格子であることと、格子 L' が次の条件(1)と(2)をみたすことは同値である：

- (1) $\min(L') = 2$ 、
- (2) L' において、 L' の任意のベクトルは偶数個の 2-ベクトルといくつかの 3-ベクトルの和として表わされる。

証明. まず、 $L'(2)$ や $L'(3)$ のベクトルは L' で既約であり、

$$L(3) = \{\pm e_k + y \mid 1 \leq k \leq r, y \in L'(2)\} \cup L'(3)$$

であることに注意する。 L は 3 - 格子であるとせよ。 $L'(2) = \phi$ なら $L(3) = L'(3)$ となり、 e_1 を 3 - ベクトルの和として書いたとき、 $e_1 \in L'$ となって矛盾する。ゆえに $L'(2) \neq \phi$ である。すなわち $\min(L') = 2$ である。次に L' の任意のベクトル x をとれば、 x は L のベクトルでもあるから、いくつかの $L(3)$ のベクトルの和であり

$$x = \sum_{f=1}^s (a_{1f} e_1 + y_{1f}) + \sum_{g=1}^t (b_{2g} e_2 + y_{2g}) + \sum_{j=1}^m z_j, \\ (y_{1f}, y_{2g} \in L'(2), z_j \in L'(3), a_{1f} = \pm 1, b_{2g} = \pm 1)$$

と表せる (ただし $r = 1$ のときは右辺の第 2 項は現れない)。直和性から、

$$\sum_{f=1}^s a_{1f} = \sum_{g=1}^t b_{2g} = 0, x = \sum_{f=1}^s y_{1f} + \sum_{g=1}^t y_{2g} + \sum_{j=1}^m z_j$$

である。前 2 つの式より s も t も偶数である。ゆえに 3 つ目の式から、 x は偶数個の 2 - ベクトルといくつかの 3 - ベクトルの和として表わされる。逆に L' が上の(1)と(2)をみたすとせよ。 e_k と L' の任意のベクトルが $L(3)$ のベクトルの和で表わされることを示せばよい。 $\min(L') = 2$ であるから $Q(y) = 2$ をみたす L' のベクトルがある。条件(2)から y は

$$y = \sum_{f=1}^s y_f + \sum_{j=1}^m z_j, s \text{ は偶数}, y_f \in L'(2), z_j \in L'(3)$$

と表わされる。したがって ($s = 2p$ とおいて)

$$e_k = (e_k - y) + \sum_{f=1}^p (e_k + y_f) + \sum_{f=1}^p (-e_k + y_{p+f}) + \sum_{j=1}^m z_j$$

となって、 e_k は 3 - ベクトルの和で表わされる。最後に、 L' の任意のベクトルが L の 3 - ベクトルの和で表わされることをいう。条件(2)より、2 個の 2 - ベクトルの和 $y_1 + y_2$ が L の 3 - ベクトルの和で表わされることをいえばよい。明らかに、 $y_1 + y_2 = (e_1 + y_1) + (-e_1 + y_2)$ であるから証明が終わる。

命題 3. $r=3$ とする。このとき、 L が 3-格子であることと、格子 L' が次の条件(1)と(2)をみたすことは同値である：

- (1) $\min(L')=2$ 、
- (2) L' において、 L' の任意のベクトルはいくつかの 2-ベクトルといくつかの 3-ベクトルの和として表わされる。

証明. まず、 $L'(2)$ や $L'(3)$ のベクトルは L' で既約であり、

$$L(3) = \{\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3\} \cup \{\pm e_k + y \mid 1 \leq k \leq 3, y \in L'(2)\} \cup L'(3)$$

であることに注意する。 L は 3-格子であるとせよ。 $L'(2) = \phi$ なら e_1 を 3-ベクトルの和として書くと

$$e_1 = \sum_{f=1}^s (a_{1f}e_1 + a_{2f}e_2 + a_{3f}e_3) + \sum_{j=1}^m z_j \quad (a_{1f}, a_{2f}, a_{3f} = \pm 1, z_j \in L'(3))$$

であり、直和性から、 $\sum_{f=1}^s a_{1f} = 1$ つまり s は奇数、また $\sum_{f=1}^s a_{2f} = 0$ つまり s は偶数となって、矛盾する。ゆえに、 $L'(2) \neq \phi$ 、すなわち $\min(L')=2$ である。次に L' の任意のベクトル x をとれば、 x は L のベクトルでもあるから、いくつかの $L(3)$ のベクトルの和であり

$$x = \sum_{k=1}^p v_k + \sum_{f=1}^s (a_{1f}e_1 + y_{1f}) + \sum_{g=1}^t (b_{2g}e_2 + y_{2g}) + \sum_{h=1}^u (c_{3h}e_3 + y_{3h}) + \sum_{j=1}^m z_j, \\ (y_{1f}, y_{2g}, y_{3h} \in L'(2), z_j \in L'(3), a_{1f} = \pm 1, b_{2g} = \pm 1, c_{3h} = \pm 1)$$

とする。ただし $v_k \in \{\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3\}$ 。直和性から

$$x = \sum_{f=1}^s y_{1f} + \sum_{g=1}^t y_{2g} + \sum_{h=1}^u y_{3h} + \sum_{j=1}^m z_j$$

である。つまり、 x はいくつかの 2-ベクトルと 3-ベクトルの和である。逆に L' が上の(1)と(2)をみたすとせよ。 e_k と L' の任意のベクトルが $L(3)$ のベクトルの和で表わされることを示せばよい。 $\min(L')=2$ であるから $Q(y)=2$ をみたす L' のベクトルがある。条件(2)から y は

$$y = \sum_{f=1}^s y_f + \sum_{j=1}^m z_j, y_j \in L'(2), z_j \in L'(3)$$

と表わされる。 s が偶数のときは、 $s = 2p$ とおいて

$$e_1 = (e_1 - y) + \sum_{f=1}^p (e_1 + y_f) + \sum_{f=1}^p (-e_1 + y_{p+f}) + \sum_{j=1}^m z_j$$

となり、 s が奇数のときは、 $s = 2p+1$ とおいて

$$e_1 = (e_1 - e_2 - e_3) + (e_2 - y) + (e_3 + y_s) + \sum_{f=1}^p (e_2 + y_f) + \sum_{f=1}^p (-e_2 + y_{p+f}) + \sum_{j=1}^m z_j$$

となり、いずれにせよ、 e_1 は 3-ベクトルの和で表わされる。 e_2, e_3 についても同様である。最後に、 L' の任意のベクトルが L の 3-ベクトルの和で表わされることをいう。条件(2)より、2-ベクトル y が L の 3-ベクトルの和で表わされることをいえばよい。明らかに、

$$y = (-e_1 + y) + (-e_2 + y) + (-e_3 - y) + (e_1 + e_2 + e_3)$$

であるから証明が終わる。

命題 4. $r \geq 4$ とする。このとき L が 3-格子であることと、格子 L' が次の条件(1)をみたすことは同値である：

- (1) L' において、 L' の任意のベクトルはいくつかの 2-ベクトルといくつかの 3-ベクトルの和として表わされる。

証明. まず、 $L'(2)$ や $L'(3)$ のベクトルは L' で既約であり、

$$L(3) = W \cup \{\pm e_k + y \mid 1 \leq k \leq r, y \in L'(2)\} \cup L'(3)$$

であることに注意する。ただし、 $W = \{\pm e_i \pm e_j \pm e_k \mid i < j < k\}$ 。 L は 3-格子であるとせよ。 L' の任意のベクトル x をとれば、 x は L のベクトルでもあるから、いくつかの $L(3)$ のベクトルの和であり

$$x = \sum_k v_k + \sum_f (a_f e_f + y_f) + \sum_j z_j$$

$$(v_k \in W, y_f \in L'(2), z_j \in L'(3), a_f = \pm 1)$$

と表せる。直和性から、

$$x = \sum_f y_f + \sum_j z_j$$

である。つまり、 x は L' のいくつかの 2-ベクトルと 3-ベクトルの和である。

逆に L' が上の(1)をみたすとせよ。 e_k と L' の任意のベクトルが $L(3)$ のベクトルの和で表わされることを示せばよい。等式

$$e_1 = (e_1 + e_2 + e_3) + (e_1 - e_2 + e_4) + (-e_1 - e_3 - e_4)$$

であるから、 e_1 は (したがって一般の e_k は) 3-ベクトルの和で表わすことができる。最後に、 L' の任意のベクトルが L の 3-ベクトルの和で表わされることをいう。条件(1)より、2-ベクトル y が (もし存在するなら) L の 3-ベクトルの和で表わされることをいえばよい。明らかに、

$$y = (-e_1 + y) + (-e_2 + y) + (-e_3 - y) + (e_1 + e_2 + e_3)$$

であるから証明が終わる。

次に、上の命題に現れた格子 L' の直交分解を考察する。格子 L が条件

(*) $\min(L) \geq 2$ 、 L は $L(2) \cup L(3)$ で生成される

をみたすとせよ。したがって $L(2) \cup L(3)$ のベクトルは L において既約である。

ゆえに、もし $L = L_1 \perp L_2$ と直交分解するならば、 $L(2) = L_1(2) \cup L_2(2)$ 、 $L(3) = L_1(3) \cup L_2(3)$ である。すなわち、格子 L_1 も格子 L_2 も上記の条件 (*) をみたす。ゆえに L の既約直交分解の各因子も上記の条件 (*) をみたすことがわかる。そこで上記条件 (*) をみたす既約格子 M を考える。このとき M は次の3種のタイプに分かれる：(1) $M(3) = \phi$ 、(2) $M(2) = \phi$ 、(3) $M(2) \neq \phi$ かつ $M(3) \neq \phi$ 。(1)の場合 M は 2-格子であり、(2)の場合 M は最小値 3 の 3-格子であることは明らかである。次に(3)の場合に、 M が最小値 2 の 3-格子である

ことを示す。 $M(3)$ で生成された (M の部分) 格子を M_3 とし、

$$X = \{x \in M(2) \mid B(x, M_3) = \{0\}\}, Y = \{y \in M(2) \mid y \notin M_3\}$$

とおく。任意のベクトル $x \in X$ を取る。もし $x \in M_3$ なら、 $2 = Q(x) = B(x, x) = 0$ で矛盾。ゆえに $x \notin M_3$ 、つまり $X \subset Y$ である。逆に、任意の $y \in Y$ を取る。もし $y \notin X$ なら $B(y, x) \neq 0$ となる $x \in M(3)$ がある。格子 $\mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y$ は正值格子だから

$$Q(x)Q(y) - B(x, y)^2 = 6 - B(x, y)^2 > 0$$

より $B(x, y) = \pm 1, \pm 2$ である。後者なら $Q(x \mp y) = 1$ となって $\min(M) \geq 2$ に矛盾する。また $B(x, y) = \pm 1$ なら、 $y = (y \mp x) + (\pm x) \in M_3$ となって y の取り方に矛盾する。ゆえに $y \in X$ となり、 $Y \subset X$ を得る。結局 $X = Y$ である。ゆえに、 X で生成された格子を M_2 とおけば、 M が $M(2) \cup M(3)$ で生成されるという仮定より、 $M = M_2 + M_3$ である。また明らかに $B(M_2, M_3) = \{0\}$ であるから、 $M = M_2 \perp M_3$ となる。 M は既約だったから、 $M_2 = \{0\}$ 、つまり $M = M_3$ であり、 M は 3-格子である。

元に戻って、命題 2、3、4 に現われた格子 L' の既約直交分解 $L' = M_1 \perp \cdots \perp M_m$ を考える。 L' は上記の条件 (*) をみたすから、 M_i は、上に考察したように、2-格子か、最小値 3 の 3-格子か、最小値 2 の 3-格子である。さらに 2 次元以上の既約 2-格子があれば、 $u_1 + u_2 + u_3 = 0$ をみたす 2-ベクトル、 u_1, u_2, u_3 があり、最小値が 2 の既約 3-格子があれば、 $u + \sum v_i = 0$ をみたす 2-ベクトル u と 3-ベクトル v_i がある。したがって命題 2 での「偶数個」という条件は不要になる。他方、1 次元の 2-格子 (つまり $[2]$) が 1 つ以上と最小値が 3 の 3-格子がいくつかの直交直和のときは、命題 2 での「偶数個」は成り立たない。以上から次の定理を得る。

定理. 格子 L の既約直交分解を $L = L_m \perp L_1 \perp \cdots \perp L_n$ とする。このとき、 L が 3-格子であることと、各 L_i が 2-格子、最小値が 2 の 3-格子、最小値が 3 の

3-格子のいずれかであって、次の条件のひとつをみたすこととは同値である：

- (1) $m = 0$ であって、 L_i たちは最小値が2の3-格子か最小値が3の3-格子のいずれかである。
- (2) $m = 1, 2$ であって、 L_i たちの中に2-格子か最小値2の3-格子が少なくともひとつ含まれる。また、 L_i たちの中に1次元2-格子 ($[2]$) が含まれるときは、2次元以上の2-格子か最小値2の3-格子が少なくともひとつ含まれる。
- (3) $m = 3$ であって、 L_i たちの中に2-格子か最小値2の3-格子が少なくともひとつ含まれる。
- (4) $m \geq 4$ である。

注意. この定理から、3-格子をすべて見つけるには、最小値が2または3の既約3-格子だけをすべて分類できればよいということになる。

3. 最小値が2の既約3-格子

ここでは最小値が2の既約3-格子のうち、2次元、3次元、4次元のものを決定する。 L は最小値が2の既約3-格子とする。その生成ベクトルの集合 (生成系と呼ぶ) を $\{x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_t\}$ とする。ただし、 x_1, \dots, x_s は2-ベクトル、 y_1, \dots, y_t は3-ベクトルとする。これらは既約ベクトルである。生成系のうち、 $s+t$ を最小にするものを考え、さらにそのうちで t を最小にするものを最小生成系と呼ぶ。正值性から、生成系から得られる対称行列の小行列式は全て非負であることに注意する。ここで、 $\{x_1, \dots, x_s\}$ で生成された格子は2-格子であるから、1節で述べた2-格子の分類によって、 $B(x_i, x_j) = 0, 1$ ($1 \leq i < j \leq s$) としてよい。また、 $B(y_k, y_h) = 0, \pm 1, \pm 2$ である ($1 \leq k < h \leq t$) が、もし $B(y_k, y_h) = \pm 2$ なら

$$\mathbb{Z}y_k + \mathbb{Z}y_h = \mathbb{Z}(y_k \mp y_h) + \mathbb{Z}y_h, \quad Q(y_k \mp y_h) = 2, \quad Q(y_h) = 3$$

となって、 t を最小にとることに矛盾する。結局

$$Q(x_1) = \cdots = Q(x_s) = 2, Q(y_1) = \cdots = Q(y_h) = 3$$

$$B(x_i, x_j) = 0, 1 (1 \leq i < j \leq s), B(y_k, y_h) = 0, \pm 1 (1 \leq k < h \leq t)$$

$$B(x_i, y_k) = 0, \pm 1$$

であるとしてよい。これをもとに、計算機を用いて、同型性を考慮して次の一覧を得た。

$$\text{ただし、} d = \text{disc}(L), \mu_2 = \frac{1}{2} \#\{x \mid Q(x) = 2\}, \mu_3 = \frac{1}{2} \#\{x \mid Q(x) = 3\}。$$

2 次元.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad d = 5, \mu_2 = 1, \mu_3 = 2$$

3 次元.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} d = 7 \\ \mu_2 = 3 \\ \mu_3 = 3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} d = 8 \\ \mu_2 = 2 \\ \mu_3 = 4 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} d = 12 \\ \mu_2 = 1 \\ \mu_3 = 4 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} d = 13 \\ \mu_2 = 1 \\ \mu_3 = 3 \end{array}$$

4 次元.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} d = 8 \\ \mu_2 = 6 \\ \mu_3 = 6 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} d = 9 \\ \mu_2 = 6 \\ \mu_3 = 4 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} d = 11 \\ \mu_2 = 4 \\ \mu_3 = 6 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} d = 12 \\ \mu_2 = 3 \\ \mu_3 = 8 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} d = 15 \\ \mu_2 = 3 \\ \mu_3 = 6 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} d = 16 \\ \mu_2 = 3 \\ \mu_3 = 6 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} d = 16 \\ \mu_2 = 2 \\ \mu_3 = 8 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} d = 18 \\ \mu_2 = 3 \\ \mu_3 = 4 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} d = 19 \\ \mu_2 = 2 \\ \mu_3 = 6 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} d = 20 \\ \mu_2 = 2 \\ \mu_3 = 5 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} d = 24 \\ \mu_2 = 1 \\ \mu_3 = 4 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} d = 27 \\ \mu_2 = 1 \\ \mu_3 = 6 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} d = 28 \\ \mu_2 = 1 \\ \mu_3 = 5 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} d = 28 \\ \mu_2 = 1 \\ \mu_3 = 6 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} d = 31 \\ \mu_2 = 1 \\ \mu_3 = 5 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} d = 32 \\ \mu_2 = 1 \\ \mu_3 = 4 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} d = 33 \\ \mu_2 = 1 \\ \mu_3 = 4 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} d = 34 \\ \mu_2 = 1 \\ \mu_3 = 4 \end{array}$$

4. 最小値が3の既約3-格子

ここでは最小値が3の既約3-格子のうち、2次元、3次元、4次元のものを決定する。 L は最小値が3の既約3-格子とする。その生成ベクトルの集合(生成系と呼ぶ)を $\{y_1, \dots, y_t\}$ とする。ただし、 y_1, \dots, y_t は3-ベクトルとする。これらは既約ベクトルである。生成系のうち、 t を最小にするものを最小生成系と呼ぶ。この場合、 $B(y_i, y_j) = 0, \pm 1 (1 \leq i < j \leq t)$ である。また正值性から、生成系から得られる対称行列の小行列式は全て非負である。これをもとに、計算機を用いて、同型性を考慮して次の一覧を得た。

以下、 $d = \text{disc}(L)$, $\mu_3 = \frac{1}{2} \#\{x \in L \mid Q(x) = 3\}$ である。

1次元.

$$[3] \quad \begin{array}{l} d = 3 \\ \mu_3 = 1 \end{array}$$

2次元

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} d = 8 \\ \mu_3 = 2 \end{array}$$

3次元.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} d = 16 \\ \mu_3 = 4 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} d = 20 \\ \mu_3 = 3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} d = 21 \\ \mu_3 = 3 \end{array}$$

4次元.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} d = 32 \\ \mu_3 = 6 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} d = 40 \\ \mu_3 = 5 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} d = 45 \\ \mu_3 = 4 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} d = 48 \\ \mu_3 = 4 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} d = 48 \\ \mu_3 = 4 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} d = 49 \\ \mu_3 = 4 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} d = 52 \\ \mu_3 = 4 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} d = 54 \\ \mu_3 = 4 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} d = 55 \\ \mu_3 = 4 \end{matrix}$$

参考文献

- [1] M. Kneser: Lineare Relation zwischen Darstellungsanzahlen quadratischer Formen, Math. Annalen, **168** (1967), 31-39.
- [2] M. Ozeki: Note on the positive definite integral quadratic lattices, Jour. Math. Soc. Japan, **28** (1976), 421-446.
- [3] Y. Mimura: On 2-lattices over real quadratic integers, Mathematics Seminar Notes, **7** (1979), 327-342.
- [4] Y. Mimura: On 2-lattices in an hermitian space, Mathematica Japonica, **27** (1982), 213-224.
- [5] Y. Mimura: N2- and N3-lattices over real quadratic integers, Libra, **3** (2001), 1-12
- [6] O. T. O'Meara: Introduction to quadratic forms, Springer-Verlag, 1962