

《報 告》

自明な単数群をもつ

正定値ユニモジュラー格子の構成 (概要)

味 村 良 雄

目 次

1. はじめに
2. Etsuko Bannai の結果 (1988)
3. Yoshio Mimura による最初の実例 (1990)
4. Roland Bacher による最小次元での実例 (1993)

1. はじめに

V は有理数体上の正定値 2 次空間で、その上の対称双一次形式を B 、それに付随する 2 次形式を Q とする。したがって

$$Q(x) = B(x, x), 2B(x, y) = Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$$

である。 L は内の格子、つまり V 内の有限生 \mathbb{Z} 成加群である。 V の直交群 $O(V)$ は

$$O(V) = \{\sigma \in GL(V) \mid Q(\sigma x) = Q(x) \text{ for } \forall x \in V\}$$

で定義される。 L の単数群 (自己同型群) $O(L)$ は

$$O(L) = \{\sigma \in O(V) \mid \sigma(L) = L\}.$$

によって定義される。これは格子 L の対称性を表わしている。また、 V の正定値性から、 $O(L)$ は有限群であり、 $\pm 1_L \in O(L)$ であることに注意する。これが極端な場合、つまり $O(L) = \{\pm 1_L\}$ をみたす格子 L (原点对称以外に対称

*2006年1月26日受理。

性がない格子) は存在するだろうか? 1975年に O. T. O'Meara は、与えられた任意の格子からそのような格子を構成する方法を与えた。しかし、この場合、その格子の判別式は大きくなる。1981年に J. Biermann は、任意の次元について、判別式は大きくなるが、そのような格子の存在を証明した。

格子についての復習から始める。 \mathbb{Z} は単項イデアル整域であるから、 L は自由加群となり、 \mathbb{Z} 上の基底をもつ。すなわち

$$L = \mathbb{Z} x_1 + \mathbb{Z} x_2 + \cdots + \mathbb{Z} x_n.$$

この基底に対して、対称行列

$$A = \begin{bmatrix} B(x_1, x_1) & B(x_1, x_2) & \cdots & B(x_1, x_n) \\ B(x_2, x_1) & B(x_2, x_2) & \cdots & B(x_2, x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(x_n, x_1) & B(x_n, x_2) & \cdots & B(x_n, x_n) \end{bmatrix}$$

を考える。 L を表わすときに、この行列 A を用いることにする。その行列式をこの格子の判別式と呼び、 $d(L)$ と表わす。これは上の基底の取り方によらずに定まる正数である。 L のスケール $s(L)$ とノルム $n(L)$ を次のように定義する：

$s(L)$ は $\{B(x, y) \mid x, y \in L\}$ で生成されたイデアル、

$n(L)$ は $\{Q(x) \mid x \in L\}$ で生成されたイデアル。

以下、 $s(L) = \mathbb{Z}$ (つまり L は整格子) と仮定する。したがって $n(L) = \mathbb{Z}$ か $n(L) = 2\mathbb{Z}$ である。前者のとき L は奇格子と呼び、後者のとき L は偶格子と呼ぶ。また、 $s(L) = \mathbb{Z}$ で $d(L) = 1$ のとき、 L はユニモジュラー格子であるという。

次の行列をもつ n 次元の格子 M_n を考える：

$$M_n \cong \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

ちょっとした計算で、この格子の単数群 $O(L)$ は自明であることがわかる。しかし、その判別式は n の増加と共に急速に大きくなる。

今、2次元の整格子をリストアップする：簡約論から、その行列は

$$\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \quad (0 < a \leq b, 0 \leq c \leq a/2)$$

と書くことができる。

$$L \cong \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \#O(L) = 12, d(L) = 3$$

$$L \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \#O(L) = 8, d(L) = 1$$

$$L \cong \begin{bmatrix} a & c \\ c & a \end{bmatrix}, \#O(L) = 4 (0 < c < a/2)$$

$$L \cong \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \#O(L) = 4 (0 < a < b)$$

$$L \cong \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}, \#O(L) = 4 (0 < a < b, a = 2c)$$

$$L \cong \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}, \#O(L) = 2 (0 < a < b, 0 < c < a/2).$$

これを見れば、ほとんどすべての格子 L に対して「 $O(L)$ は自明である」といってよいだろう。もちろん、その判別式は $ab - c^2 > \frac{3}{4}ab$ だから、 b の増加とと

もに大きくなる。以下では、判別式が最小値 1 の格子、つまりユニモジュラー格子で、自明な自己同型群をもつ場合を考える。

L をユニモジュラー格子とする。各次元 n に対して、少なくとも 1 つの奇ユニモジュラー格子が存在することは明らかである（単位行列に対応する格子がその例である）。よく知られているように、 n が 8 の倍数であるとき、またそのときに限って、偶ユニモジュラー格子が存在する。実際に、低次元の場合には、ユニモジュラー格子は完全に分類されていて、それぞれに対する自己同型群も分かっている。以下に列挙する：

$n \leq 7$ の場合、各 n に対して 1 個ずつあり、次の奇格子 I_n である：

$$I_n \cong [1] \perp [1] \perp \cdots \perp [1]. \#O(L) = 2^n \times n!$$

$n = 8$ の場合、奇格子 I_8 か偶格子 E_8 である：

$$I_8 \cong [1] \perp [1] \perp \cdots \perp [1]. \#O(L) = 2^8 \times 8!$$

$$E_8 \cong \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\#O(L) = 2^{14} \times 3^5 \times 5^2 \times 7 = 696729600.$$

$n = 9, 10, 11$ の場合：

$$I_n. \quad \#O(L) = 2^n \times n!$$

$$I_{n-8} \perp E_8. \quad \#O(L) = 2^{n-8} (n-8)! \times \#O(E_8)$$

J. H. Conway と N. J. A. Sloane の本「Sphere Packings, Lattices and Groups」

(Springer) を参照されたい。この本では、 $n \leq 24$ に対して、すべてのユニモジュラー格子が列挙されていて、その自己同型群もわかる。それらの中で、自

明な自己同型群をもつものは I_1 のみである。

2. Etsuko Bannai の結果 (1988)

彼女は次の結果を証明したが、その具体例は1つも与えていない。

$n \leq 43$ の場合、自明な自己同型群をもつ n 次元の奇ユニモジュラー格子が存在する。また、 $n \geq 144$ の場合、自明な自己同型群をもつ n 次元の偶ユニモジュラー格子が存在する。

参照. E. Bannai : Positive definite unimodular lattices with the trivial automorphism groups (The Ohio State Univ.での学位論文).

3. Yoshio Mimura による最初の実例 (1990)

自明な自己同型群をもつユニモジュラー格子で、Mimuraは次の例を与えた：
次元が36と40の奇ユニモジュラー格子，
次元が64の偶ユニモジュラー格子。

参照. Y. Mimura : Explicit examples of unimodular lattices with the trivial automorphism groups, Proceedings of KAIST Mathematics Workshop, vol 5, 1990, 91-95.

3-1. Kneser の neighbouring を用いてユニモジュラー格子を構成すること。

Kneser の neighbouring は与えられた格子種 (genus) の中で格子をたくさん見つけるための簡単で有用な方法である。その手順は次のステップ 1, 2, 3 に従う。

1. 初期格子： $I = I_n = \mathbb{Z} e_1 + \cdots + \mathbb{Z} e_n \cong [1] \perp \cdots \perp [1]$

2. 正整数 q とベクトル $v \in q^{-1}I$ を、 $Q(x) \in \mathbb{Z}$ をみたすようにとる。

3. Neighbouring : $L = I[v] = \mathbb{Z}v + \{u \in I | B(u, v) \in \mathbb{Z}\}$.

(詳細) 構成法から次のことがわかる：

a) L はユニモジュラーになる。とくに、 q が奇数のとき L は奇格子である。

b) $v = q^{-1} \sum_{i=1}^n c_i e_i$ ($c_i \in \mathbb{Z}$) であるなら、
 L の任意のベクトル x は

$$x = \pm(cv + \sum_{i=1}^n a_i e_i), \quad c \in \mathbb{Z}, \quad a_i \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq c \leq q/2$$

$$\sum_{i=1}^n c_i a_i \equiv 0 \pmod{q}$$

と表現できる。

c) $Q(x) = q^{-2} \sum_{i=1}^n (cc_i + qa_i)^2$

注意.

i) $L = J \perp K$ ($J, K \neq \{0\}$) ならば、 $\pm 1_L \neq 1_J \perp (-1_K) \in O(L)$ 、つまり $O(L)$ は自明でない。

ii) ベクトル $x \in L$ が $Q(x) = 1$ をみたすならば、 $L = [1] \perp L'$ である。

iii) ベクトル $x \in L$ が $Q(x) = 2$ をみたすならば、 $\pm 1_L \neq \tau_x \in O(L)$ 、つまり、 $O(L)$ は自明でない。ここで、 x に関する鏡映写像 τ_x は

$$\tau_x(y) = y - \frac{2B(x, y)}{Q(x)}x \quad (\text{任意の } y \in L)$$

で定義される。

iv) したがって、ベクトル v は次をみたすように選ばなければならない：

a) $c_i \not\equiv 0 \pmod{q}$ ($1 \leq i \leq n$) [(i) と (ii) による]

b) $c_i \not\equiv \pm c_j \pmod{q}$ ($1 \leq i < j \leq n$) [(iii) による]

c) $\sum_{i=1}^n R(cc_i)^2 > 2q^2$ ($1 \leq c \leq q/2$) [(iii) による]

ここで、 $R(a)$ は $R(a) \equiv a \pmod{q}$ と $|R(a)| \leq q/2$ によって定義する。

3-2. $O(L)$ の自明性の証明

m を正整数とする。

$$X = \{x \in L \mid Q(x) = m\}, \bar{X} = X/\pm 1$$

とおき、 \bar{X} を頂点集合とするグラフ G を考える。ただし、 $\pm x$ と $\pm y$ は、 $B(x, y) \neq 0$ のとき、かつそのときに限り辺で結ばれているものとする。

このとき、明らかに、群 $O(L)$ はグラフ G の自己同型群を導く。

命題. 次の (P1), (P2), (P3) が成り立てば、自己同型群 $O(L)$ は自明である。

(P1) $H = \{1\}$ 、

(P2) G は連結である、

(P3) V は \mathbb{Q} 上 X で生成される。

証明. 任意の $\sigma \in O(L)$ をとれ。(P1) によって、任意の $x \in X$ に対して $\sigma x \in \{x, -x\}$ である。ベクトル $x_0 \in X$ をひとつとって固定する。必要なら、 σ を $-\sigma$ で置き換えて、 $\sigma x_0 = x_0$ と仮定してよい。ゆえに $B(x_0, y) \neq 0$ をみたす任意の $y \in X$ について $\sigma y = y$ である。したがって、(P2) によって、任意の $x \in X$ について $\sigma x = x$ である。結局、(P3) によって、 $\sigma = 1_V$ を得る。証明終。

3-3. 実例

(1) 40次元の奇ユニモジュラー格子.

$$n = 48, q = 97, 97v = \sum_{j \in J} j e_j, Q(v) = 4,$$

ここで $J = \{j \in \mathbb{Z} \mid 6 \leq j \leq 48, j \neq 8, 10, 13\}$ である。

$$I_{48}[v] = I_8 \perp L, X = \{x \in L \mid Q(x) = 3\}.$$

\bar{X} の要素は

$$\pm(e_i + e_j + e_k)(i, j, k \in J, i < j < k, i + j + k = 97),$$

$$\pm(e_i + e_j - e_k)(i, j, k \in J, i < j < k, i + j = k)。$$

$\#\bar{X} = 163 + 249 = 412$ であることがわかる。

G の各頂点の次数は $81, 82, \dots, 94$ のひとつである。

ゆえに $\bar{X} = \bar{X}_{81} \cup \dots \cup \bar{X}_{94}$ (disjoint 和), ここで $\bar{X}_t = \{\pm x \in \bar{X} | \deg(\pm x) = t\}$ とする。

各集合 \bar{X}_t は $O(L)$ で不変である。 \bar{X} 上の関数 δ_t を考える：

$$\delta_t(\pm x) = \#\{\pm y \in \bar{X}_t | \pm x \text{ と } \pm y \text{ は結ばれている}\}。$$

すべての t に対して、次を証明することができる：

$$\pm x = \pm y \iff \delta_t(\pm x) = \delta_t(\pm y)。$$

すべての $\sigma \in O(L)$ に対して $\delta_t(\pm x) = \delta_t(\sigma(\pm x))$ だから、(P1) はみたされる。

直接計算により、(P2) も (P3) も正しいことがわかる。

(2) 36次元の奇ユニモジュラー格子。

$$n = 38, q = 79, 79v = \sum_{j \in J} j e_j, Q(v) = 3,$$

ただし、 $J = \{j \in \mathbb{Z} | 1 \leq j \leq 38, j \neq 10, 14\}$ とする。

$$I_{38}[v] = I_2 \perp L, X = \{x \in L | Q(x) = 3\}。$$

この場合、 $\bar{X} = \bar{X}_{91} \cup \bar{X}_{93} \cup \bar{X}_{95}$ (disjoint 和) を得る。これは、 $O(L)$ で不変な 400個の部分集合に分かれる。

(3) 64次元の偶ユニモジュラー格子。

$$n = 129, q = 270, 270v = \sum_{j \in J} j' e_j, Q\{v\} = 6,$$

ここで、 $J = \{j \in \mathbb{Z} | 1 \leq j \leq 129, j \neq 5, j : \text{odd}\}$ 、 $j' = j (j \neq 3, 3' = -267)$ 。

$$I_{129}[v] = I_{65} \mid L, X = \{x \in L | Q(x) = 4\}。$$

4. Roland Bacher による最小次元での実例 (1993)

Mimura と同じやり方で、R. Bacher は次の実例を与えた：

次元が29の奇ユニモジュラー格子で自明な自己同型群をもつもの、

次元が32の偶ユニモジュラー格子で自明な自己同型群をもつもの。

参照：Réseaux unimodulaires sans automorphismes, 18-ièmes Journées arithmétiques, Bordeaux, 1993.

(1) 29次元の奇ユニモジュラー格子： $I_{29}[v]$

$$n = 29, q = 71, 71v = \sum_{j=1}^{29} c_j e_j, Q(v) = 14,$$

ここで c_j は 5, 7, ..., 16, 18, ..., 24, 238, 26, ..., 35 を動く。

(2) 32次元の偶ユニモジュラー格子： $I_{32}[v]$

$$n = 32, q = 142, 142v = \sum_{j=1}^{32} c_j e_j, Q(v) = 4,$$

ここで c_j は

3, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, -105, 39, 41, 43, 45, -95, 49, 53, 55, -85, 59, -81, -79, 65, 67, -73 を動く。

当時は自明な自己同型群をもつ28次元の奇ユニモジュラー格子が存在するか否かは未解決問題であった。しかし、その後、否定的な結果が得られ、Bacher の示した例が最も低次元の例であった。偶ユニモジュラー格子については、Bacher の例が最も低次元の例である。しかし、ある次元に対しての存在性は、それより低い次元に対する存在性を保証しない。まとめて、存在性の観点から見ると

(1) 自明な自己同型群をもつ奇ユニモジュラー格子について

$n \geq 43$ のとき、 n 次元格子が存在する。

$n \leq 28$ のとき、 n 次元格子は存在しない。

$n = 29, 36$ のとき、 n 次元格子は存在する（実例あり）。

$n = 30, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42$ に対して未解決。

(2) 自明な自己同型群をもつ偶ユニモジュラー格子について

$n \geq 144$ のとき、 n 次元格子が存在する。

$n \leq 24$ のとき、 n 次元格子は存在しない。

$n = 32, 64$ のとき、 n 次元格子は存在する（実例あり）。

$n = 40, 48, 56, 72, 80, 88, 96, 104, 112, 120, 128, 136$ に対して未解決。

という状況である。