

《研究ノート》

2 次形式の対角種

味 村 良 雄

Abstract

In this note we study diagonal genera of positive definite quadratic forms over rational integers. Such a genus can be constructed of lower dimensional diagonal genera. So the two-dimensional case is fundamental. We will find all diagonal genera on the assumption that we have the complete list of two-dimensional diagonal genera. Consequently we will obtain the list of quadratic forms of class number one.

1. はじめに

有理整数 a_{ij} を係数にもつ n 変数の 2 次形式を考える：

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

ただし、和は i, j をそれぞれ 1 から n まで走らせて取る。この 2 次形式に対して、 a_{ij} を (i, j) 成分としてもつ行列 $[a_{ij}]$ を考えて、その行列式をこの 2 次形式の判別式という。また、 $i \neq j$ なら $a_{ij} = 0$ であるとき、つまり上のように対応させた行列 $[a_{ij}]$ が対角行列であるとき、この 2 次形式は体角的であるという。この場合

$$[a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}]$$

と書く。さらに、各変数にどんな実数値を代入しても、その形式の値が正（た

*2002年12月9日受理。

だしすべてに0を代入したときのみ値は0) になるとき, この2次形式は正值であるという. 次に, 変数 x_1, x_2, \dots, x_n の整線形変換を考える:

$$y_i = \sum_{j=1}^n t_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

ただし, t_{ij} は有理整数で, 行列 $[t_{ij}]$ の逆行列も有理整数を係数にもつ行列である. さて, 2つの2次形式 $Q_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ と $Q_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ について, ある整線形変換によって,

$$Q_1(y_1, y_2, \dots, y_n) = Q_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

となるとき, Q_1 と Q_2 は同じ類に属するという. 同じ類に属するもの同士を集めて2次形式の類がいくつかできる. また, p を素数として, 上の整線形変換における「有理整数」という条件を「 p -進整数」という条件で置き換えて, 変数の p -進整線形変換を考えることができる. このとき, 2つの2次形式が同じ p -進類に属するという定義ができる. そこで各素数 p に対して Q_1 と Q_2 が同じ p -進類に属するとき, Q_1 と Q_2 は同じ種に属するという. 同じ類に属すれば同じ種に属することは明らかである. 同じ種に属するもの同士を集めて2次形式の種ができる. あるひとつの種に属するどの2次形式も対角的であるとき, その種を対角種という. このノートでは, 正值2次形式の対角種をすべて見つけることが目標である. なお, 類数1の対角的2次形式は対角種であるから, すべての対角種を見つければ, 類数1の対角的2次形式をすべて見つけたことになる. また, 原始的な種(つまり係数たちの最大公約数が1)に限っても一般性が失われないことは明らかである. ここでは, 計算機による探索を行って, 結果を予想した. 部分的に証明が完了されていない場合があることを断っておく.

2. 2次元の場合

1次元2次形式は $Q(x) = ax^2$ という形をもつから、すべて対角的である。問題は2次元以上の場合である。ここでは2次元の2次形式を考える。この場合、2次形式は2次体の整数論におけるイデアルに対応する。ただし整数環は導手つきのものを考える必要がある。2次元形式の各類は

$$Q(x, y) = ax^2 + 2cxy + by^2, \quad 0 < a \leq b, 0 \leq c \leq a/2$$

をみたす2次形式をちょうど1つずつ含むことが知られている。判別式は $D = ab - c^2$ である。原始的という条件は $\gcd(a, b, c) = 1$ ということである。そこで $D = 1, 2, 3, \dots$ に対して、この形の2次形式をすべて取りだし、それらを種に分けて、その中から対角種であるものを拾い出すことにした。

計算結果（2次元）：

- (1) $D < 1230000$ において、対角種は636個あり、それらの中に対角的2次形式が1270個あった。最大の判別式は $D = 55440$ であった。（付表2）
- (2) また、そのうち類数が1のものは204個あり、その中での最大の判別式は $D = 1848$ であった。（付表1）

予想： $D > 55440$ に対して、2次元の対角種はない。

3. 3次元の場合

前節の末尾にのべた予想が正しいものとして、この節以下を進めることにする。2次元の対角種に属する対角型の原始的な2次形式のリストを List 2 とする。3次元の対角種に属する2次形式をひとつ取って $[a, b, c]$ ($a \leq b \leq c$) とする。はじめに述べたように、この記号は $Q(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$ を表し

ている．このとき

$$(1) \quad g = \gcd(a, b) \text{ として } [a/g, b/g] \in \text{List2},$$

$$(2) \quad g = \gcd(a, c) \text{ として } [a/g, c/g] \in \text{List2},$$

$$(3) \quad g = \gcd(b, c) \text{ として } [b/g, c/g] \in \text{List2},$$

である．したがって， $[a, b, c]$ を構成するには，List 2 から $[a_1, b_1]$ と $[b_2, c_2]$ をとって，

$$a' = a_1 b_2, \quad b' = b_1 b_2, \quad c' = b_1 c_2,$$

$$g = \gcd(a', b', c')$$

$$a = a' / g, \quad b = b' / g, \quad c = c' / g$$

として $[a, b, c]$ を作り，

$$[a/f, c/f] \in \text{List2}, \quad f = \gcd(a, c)$$

かどうかをチェックする．

以上のようにして得られた（有限個の）3次元の対角的2次形式に対して，それらの属する種が対角種かどうか判定する．このためには，第1段階として，各々の対角的2次形式 Q に対して，いくつかの（Kneser の） p -隣接形式を求めて（これらは必ず同じ種に属する），対角的でない2次形式が現れたならその2次形式 Q は棄却する．残ったものに対して3変数の2次形式の簡約形式を計算して最終的に対角種かどうか判定し，また対角種の場合にはそれに属する対角的2次形式をリストアップする．かくして次のようなりスト List 3 ができあがる．

計算結果（3次元）：

- (1) 対角種は149個あり，それらの中に対角的2次形式は232個ある．最大の判別式は $D = 21168$ である．（付表3）
- (2) また，そのうち類数が1のものは82個あり，その中で最大の判別式は $D = 1728$ である．（付表1）

4. 4次元の場合

前節と同じ様な考え方で4次元の場合も扱う. すなわち, 4次元対角種に属する対角的2次形式 $[a, b, c, d]$ について

$$(1) \quad g = \gcd(a, b, c) \text{ として } [a/g, b/g, c/g] \in \text{List3},$$

$$(2) \quad g = \gcd(a, b, d) \text{ として } [a/g, b/g, d/g] \in \text{List3},$$

$$(3) \quad g = \gcd(a, c, d) \text{ として } [a/g, c/g, d/g] \in \text{List3},$$

$$(1) \quad g = \gcd(a, b, c) \text{ として } [a/g, b/g, d/g] \in \text{List3},$$

である. したがって, $[a, b, c, d]$ を構成するには, List 3 から $[a_1, b_1, c_1]$ と $[b_2, c_2, d_2]$ をとって, $b_1/b_2 = c_1/c_2$ のとき

$$a' = a_1 b_2, \quad b' = b_1 b_2, \quad c' = c_1 b_2, \quad d' = b_1 d_2$$

$$g = \gcd(a', b', c', d')$$

$$a = a'/g, \quad b = b'/g, \quad c = c'/g, \quad d = d'/g$$

として $[a, b, c, d]$ を作り,

$$[a/f, c/f, d/f] \in \text{List3} \quad f = \gcd(a, c, d)$$

$$[a/g, c/g, d/g] \in \text{List3} \quad g = \gcd(a, b, d)$$

かどうかをチェックする.

以上のようにして得られた (有限個の) 4次元の対角的2次形式に対して, それらの属する種が対角種かどうか判定する. これにも Kneser の隣接形式が有効であり, 大部分は棄却される. 残ったものに対する判定は少し厄介である. Knipp の表での判別式は小さすぎて役に立たない. Kneser の方法が完全である条件を確認する必要がある. かくして次のようなリスト List 4 ができる.

計算結果 (4次元) :

- (1) 対角種は48個あり, それらの中に対角的2次形式は62個ある. 最大の判別式は $D = 8000$ である. (付表4)

- (2) また, そのうち類数が1のものは34個あり, その中で最大の判別式は $D=512$ である. (付表1)

5. 5次元の場合

前節と同じように, 4次元の対角的2次形式から5次元の対角的形式を構成する. 具体的には42個の形式ができあがるが, そのうちの24個は, Kneserの隣接形式によって棄却され, 残った18個の形式はいずれも類数1の対角的形式である. したがって次の結果を得る.

計算結果 (5次元以上) : (付表1)

- (1) 5次元の対角種は18個あり, いずれも類数は1である.
- (2) 6次元の対角種は8個あり, いずれも類数は1である.
- (3) 7次元の対角種は3個あり, いずれも類数は1である.
- (4) 8次元の対角種は1個あり, 類数は1である.
- (5) 9次元以上の対角種はない.

(付表 1) 類数 1 の対角的 2 次形式

2-ary Diagonal Quadratic Forms (204 forms)

1[1, 1]	2[1, 2]	3[1, 3]	4[1, 4]	5[1, 5]	6[1, 6]
6[2, 3]	7[1, 7]	8[1, 8]	9[1, 9]	10[1, 10]	10[2, 5]
12[1, 12]	12[3, 4]	13[1, 13]	15[1, 15]	15[3, 5]	16[1, 16]
18[1, 18]	18[2, 9]	21[1, 21]	21[3, 7]	22[1, 22]	22[2, 11]
24[1, 24]	24[3, 8]	25[1, 25]	28[1, 28]	28[4, 7]	30[1, 30]
30[2, 15]	30[3, 10]	30[5, 6]	33[1, 33]	33[3, 11]	37[1, 37]
40[1, 40]	40[5, 8]	42[1, 42]	42[2, 21]	42[3, 14]	42[6, 7]
45[1, 45]	45[5, 9]	48[1, 48]	48[3, 16]	57[1, 57]	57[3, 19]
58[1, 58]	58[2, 29]	60[1, 60]	60[3, 20]	60[4, 15]	60[5, 12]
70[1, 70]	70[2, 35]	70[5, 14]	70[7, 10]	72[1, 72]	72[8, 9]
78[1, 78]	78[2, 39]	78[3, 26]	78[6, 13]	85[1, 85]	85[5, 17]
88[1, 88]	88[8, 11]	93[1, 93]	93[3, 31]	102[1, 102]	102[2, 51]
102[3, 34]	102[6, 17]	105[1, 105]	105[3, 35]	105[5, 21]	105[7, 15]
112[1, 112]	112[7, 16]	120[1, 120]	120[3, 40]	120[5, 24]	120[8, 15]
130[1, 130]	130[2, 65]	130[5, 26]	130[10, 13]	133[1, 133]	133[7, 19]
165[1, 165]	165[3, 55]	165[5, 33]	165[11, 15]	168[1, 168]	168[3, 56]
168[7, 24]	168[8, 21]	177[1, 177]	177[3, 59]	190[1, 190]	190[2, 95]
190[5, 38]	190[10, 19]	210[1, 210]	210[2, 105]	210[3, 70]	210[5, 42]
210[6, 35]	210[7, 30]	210[10, 21]	210[14, 15]	232[1, 232]	232[8, 29]
240[1, 240]	240[3, 80]	240[5, 48]	240[15, 16]	253[1, 253]	253[11, 23]
273[1, 273]	273[3, 91]	273[7, 39]	273[13, 21]	280[1, 280]	280[5, 56]
280[7, 40]	280[8, 35]	312[1, 312]	312[3, 104]	312[8, 39]	312[13, 24]
330[1, 330]	330[2, 165]	330[3, 110]	330[5, 66]	330[6, 55]	330[10, 33]
330[11, 30]	330[15, 22]	345[1, 345]	345[3, 115]	345[5, 69]	345[15, 23]
357[1, 357]	357[3, 119]	357[7, 51]	357[17, 21]	385[1, 385]	385[5, 77]
385[7, 55]	385[11, 35]	408[1, 408]	408[3, 136]	408[8, 51]	408[17, 24]
462[1, 462]	462[2, 231]	462[3, 154]	462[6, 77]	462[7, 66]	462[11, 42]
462[14, 33]	462[21, 22]	520[1, 520]	520[5, 104]	520[8, 65]	520[13, 40]
760[1, 760]	760[5, 152]	760[8, 95]	760[19, 40]	840[1, 840]	840[3, 280]
840[5, 168]	840[7, 120]	840[8, 105]	840[15, 56]	840[21, 40]	840[24, 35]
1320[1, 1320]	1320[3, 440]	1320[5, 264]	1320[8, 165]	1320[11, 120]	1320[15, 88]
1320[24, 55]	1320[33, 40]	1365[1, 1365]	1365[3, 455]	1365[5, 273]	1365[7, 195]
1365[13, 105]	1365[15, 91]	1365[21, 65]	1365[35, 39]	1848[1, 1848]	1848[3, 616]
1848[7, 264]	1848[8, 231]	1848[11, 168]	1848[21, 88]	1848[24, 77]	1848[33, 56]

3 —ary Diagonal Quadratic Forms (82 forms)

1[1, 1, 1]	2[1, 1, 2]	3[1, 1, 3]	4[1, 1, 4]	4[1, 2, 2]	5[1, 1, 5]
6[1, 1, 6]	6[1, 2, 3]	8[1, 1, 8]	8[1, 2, 4]	9[1, 1, 9]	9[1, 3, 3]
10[1, 2, 5]	12[1, 1, 12]	12[1, 2, 6]	12[1, 3, 4]	12[2, 2, 3]	16[1, 2, 8]
16[1, 4, 4]	18[1, 3, 6]	18[2, 3, 3]	20[1, 2, 10]	21[1, 1, 21]	24[1, 1, 24]
24[1, 4, 6]	25[1, 5, 5]	27[1, 3, 9]	30[1, 3, 10]	32[1, 2, 16]	32[1, 4, 8]
36[1, 3, 12]	36[1, 6, 6]	36[2, 3, 6]	36[3, 3, 4]	40[1, 5, 8]	48[1, 4, 12]
48[2, 3, 8]	48[3, 4, 4]	50[1, 5, 10]	54[1, 3, 18]	54[1, 6, 9]	54[2, 3, 9]
60[2, 5, 6]	63[3, 3, 7]	64[1, 8, 8]	72[2, 3, 12]	72[3, 3, 8]	81[1, 9, 9]
90[1, 3, 30]	96[1, 4, 24]	96[1, 6, 16]	100[2, 5, 10]	108[1, 6, 18]	108[1, 9, 12]
108[2, 3, 18]	108[2, 6, 9]	125[1, 5, 25]	128[1, 8, 16]	144[1, 6, 24]	144[1, 12, 12]
144[3, 4, 12]	147[3, 7, 7]	150[2, 5, 15]	180[2, 6, 15]	189[1, 9, 21]	192[3, 8, 8]
200[1, 5, 40]	216[1, 9, 24]	288[2, 3, 48]	288[3, 8, 12]	300[1, 10, 30]	320[1, 8, 40]
384[1, 16, 24]	432[3, 4, 36]	441[1, 21, 21]	450[5, 6, 15]	576[1, 24, 24]	900[3, 10, 30]
1152[3, 8, 48]	1323[3, 7, 63]	1600[5, 8, 40]	1728[3, 8, 72]		

4 —ary Diagonal Quadratic Forms (34 forms)

1[1, 1, 1, 1]	2[1, 1, 1, 2]	3[1, 1, 1, 3]	4[1, 1, 1, 4]	4[1, 1, 2, 2]
5[1, 1, 1, 5]	6[1, 1, 2, 3]	8[1, 1, 1, 8]	8[1, 1, 2, 4]	8[1, 2, 2, 2]
9[1, 1, 3, 3]	12[1, 1, 2, 6]	12[1, 2, 2, 3]	16[1, 1, 4, 4]	16[1, 2, 2, 4]
24[1, 2, 2, 6]	27[1, 1, 3, 9]	27[1, 3, 3, 3]	32[1, 1, 4, 8]	32[1, 2, 2, 8]
32[1, 2, 4, 4]	48[1, 2, 4, 6]	54[1, 3, 3, 6]	64[1, 4, 4, 4]	81[1, 3, 3, 9]
108[1, 3, 6, 6]	108[2, 3, 3, 6]	125[1, 5, 5, 5]	128[1, 2, 8, 8]	128[1, 4, 4, 8]
216[2, 3, 6, 6]	243[1, 3, 9, 9]	432[2, 3, 6, 12]	512[1, 8, 8, 8]	

5 —ary Diagonal Quadratic Forms (18 forms)

1[1, 1, 1, 1, 1]	2[1, 1, 1, 1, 2]	3[1, 1, 1, 1, 3]	4[1, 1, 1, 1, 4]	4[1, 1, 1, 2, 2]
6[1, 1, 1, 2, 3]	8[1, 1, 2, 2, 2]	16[1, 1, 1, 4, 4]	16[1, 1, 2, 2, 4]	16[1, 2, 2, 2, 2]
32[1, 2, 2, 2, 4]	48[1, 2, 2, 2, 6]	64[1, 1, 4, 4, 4]	64[1, 2, 2, 4, 4]	81[1, 3, 3, 3, 3]
162[1, 3, 3, 3, 6]	256[1, 4, 4, 4, 4]	1296[2, 3, 6, 6, 6]		

6 —ary Diagonal Quadratic Forms (8 forms)

1[1, 1, 1, 1, 1, 1] 2[1, 1, 1, 1, 1, 2] 3[1, 1, 1, 1, 1, 3] 4[1, 1, 1, 1, 2, 2]
 16[1, 1, 2, 2, 2, 2] 32[1, 2, 2, 2, 2, 2] 64[1, 2, 2, 2, 2, 4] 243[1, 3, 3, 3, 3, 3]

7 —ary Diagonal Quadratic Forms (3 forms)

1[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1] 2[1, 1, 1, 1, 1, 1, 2] 64[1, 2, 2, 2, 2, 2, 2]

8 —ary Diagonal Quadratic Forms (1 form)

1[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

(付表 2)

1[1 1]	2[1 2]	3[1 3]	4[1 4]	5[1 5]	6[1 6]
6[2 3]	7[1 7]	8[1 8]	9[1 9]	10[1 10]	10[2 5]
12[1 12]	12[3 4]	13[1 13]	14[1 14]	[2 7]	15[1 15]
15[3 5]	16[1 16]	18[1 18]	18[2 9]	20[1 20]	[4 5]
21[1 21]	21[3 7]	22[1 22]	22[2 11]	24[1 24]	24[3 8]
25[1 25]	28[1 28]	28[4 7]	30[1 30]	30[2 15]	30[3 10]
30[5 6]	33[1 33]	33[3 11]	34[1 34]	[2 17]	36[1 36]
[4 9]	37[1 37]	39[1 39]	[3 13]	40[1 40]	40[5 8]
42[1 42]	42[2 21]	42[3 14]	42[6 7]	45[1 45]	45[5 9]
46[1 46]	[2 23]	48[1 48]	[3 16]	52[1 52]	[4 13]
55[1 55]	[5 11]	57[1 57]	57[3 19]	58[1 58]	58[2 29]
60[1 60]	60[3 20]	60[4 15]	60[5 12]	63[1 63]	[7 9]
66[1 66]	[3 22]	66[2 33]	[6 11]	70[1 70]	70[2 35]
70[5 14]	70[7 10]	72[1 72]	72[8 9]	78[1 78]	78[2 39]
78[3 26]	78[6 13]	82[1 82]	[2 41]	84[1 84]	[4 21]
84[3 28]	[7 12]	85[1 85]	85[5 17]	88[1 88]	88[8 11]
90[1 90]	[9 10]	90[2 45]	[5 18]	93[1 93]	93[3 31]
100[1 100]	[4 25]	102[1 102]	102[2 51]	102[3 34]	102[6 17]
105[1 105]	105[3 35]	105[5 21]	105[7 15]	112[1 112]	112[7 16]
114[1 114]	[6 19]	114[2 57]	[3 38]	117[1 117]	[9 13]
120[1 120]	120[3 40]	120[5 24]	120[8 15]	126[1 126]	[7 18]

126[2 63]	[9 14]	130[1 130]	130[2 65]	130[5 26]	130[10 13]
132[1 132]	[4 33]	132[3 44]	[11 12]	133[1 133]	133[7 19]
136[1 136]	[8 17]	138[1 138]	[3 46]	138[2 69]	[6 23]
142[1 142]	[2 71]	144[1 144]	[9 16]	145[1 145]	[5 29]
148[1 148]	[4 37]	150[1 150]	[6 25]	150[2 75]	[3 50]
154[1 154]	[11 14]	154[2 77]	[7 22]	156[1 156]	[12 13]
156[3 52]	[4 39]	165[1 165]	165[3 55]	165[5 33]	165[11 15]
168[1 168]	168[3 56]	168[7 24]	168[8 21]	177[1 177]	177[3 59]
180[1 180]	[4 45]	180[5 36]	[9 20]	190[1 190]	190[2 95]
190[5 38]	190[10 19]	198[1 198]	[9 22]	198[2 99]	[11 18]
205[1 205]	[5 41]	210[1 210]	210[2 105]	210[3 70]	210[5 42]
210[6 35]	210[7 30]	210[10 21]	210[14 15]	220[1 220]	[5 44]
220[4 55]	[11 20]	225[1 225]	[9 25]	228[1 228]	[4 57]
228[3 76]	[12 19]	232[1 232]	232[8 29]	238[1 238]	[2 119]
238[7 34]	[14 17]	240[1 240]	240[3 80]	240[5 48]	240[15 16]
252[1 252]	[9 28]	252[4 63]	[7 36]	253[1 253]	253[11 23]
258[1 258]	[6 43]	258[2 129]	[3 86]	273[1 273]	273[3 91]
273[7 39]	273[13 21]	280[1 280]	280[5 56]	280[7 40]	280[8 35]
282[1 282]	[3 94]	282[2 141]	[6 47]	310[1 310]	[10 31]
310[2 155]	[5 62]	312[1 312]	312[3 104]	312[8 39]	312[13 24]
322[1 322]	[2 161]	322[7 46]	[14 23]	328[1 328]	[8 41]
330[1 330]	330[2 165]	330[3 110]	330[5 66]	330[6 55]	330[10 33]
330[11 30]	330[15 22]	333[1 333]	[9 37]	340[1 340]	[4 85]
340[5 68]	[17 20]	345[1 345]	345[3 115]	345[5 69]	345[15 23]
357[1 357]	357[3 119]	357[7 51]	357[17 21]	360[1 360]	[9 40]
360[5 72]	[8 45]	372[1 372]	[4 93]	372[3 124]	[12 31]
385[1 385]	385[5 77]	385[7 55]	385[11 35]	390[1 390]	[10 39]
390[2 195]	[5 78]	390[3 130]	[13 30]	390[6 65]	[15 26]
400[1 400]	[16 25]	408[1 408]	408[3 136]	408[8 51]	408[17 24]
418[1 418]	[11 38]	418[2 209]	[19 22]	420[1 420]	[4 105]
420[3 140]	[12 35]	420[5 84]	[20 21]	420[7 60]	[15 28]
438[1 438]	[6 73]	438[2 219]	[3 146]	442[1 442]	[17 26]
442[2 221]	[13 34]	445[1 445]	[5 89]	462[1 462]	462[2 231]
462[3 154]	462[6 77]	462[7 66]	462[11 42]	462[14 33]	462[21 22]
468[1 468]	[4 117]	[9 52]	[13 36]	498[1 498]	[3 166]
498[2 249]	[6 83]	505[1 505]	[5 101]	510[1 510]	[15 34]
510[2 255]	[17 30]	510[3 170]	[5 102]	510[6 85]	[10 51]

520[1 520]	520[5 104]	520[8 65]	520[13 40]	522[1 522]	[9 58]
522[2 261]	[18 29]	525[1 525]	[21 25]	525[3 175]	[7 75]
528[1 528]	[16 33]	528[3 176]	[11 48]	532[1 532]	[4 133]
532[7 76]	[19 28]	570[1 570]	[19 30]	570[2 285]	[15 38]
570[3 190]	[10 57]	570[5 114]	[6 95]	580[1 580]	[4 145]
[5 116]	[20 29]	598[1 598]	[23 26]	598[2 299]	[13 46]
600[1 600]	[24 25]	600[3 200]	[8 75]	630[1 630]	[9 70]
630[2 315]	[18 35]	630[5 126]	[14 45]	630[7 90]	[10 63]
658[1 658]	[2 329]	658[7 94]	[14 47]	660[1 660]	[4 165]
660[3 220]	[12 55]	660[5 132]	[20 33]	660[11 60]	[15 44]
690[1 690]	[6 115]	690[2 345]	[3 230]	690[5 138]	[23 30]
690[10 69]	[15 46]	708[1 708]	[4 177]	708[3 236]	[12 59]
742[1 742]	[7 106]	742[2 371]	[14 53]	760[1 760]	760[5 152]
760[8 95]	760[19 40]	765[1 765]	[9 85]	765[5 153]	[17 45]
777[1 777]	[21 37]	777[3 259]	[7 111]	792[1 792]	[9 88]
792[8 99]	[11 72]	793[1 793]	[13 61]	798[1 798]	[7 114]
798[2 399]	[14 57]	798[3 266]	[21 38]	798[6 133]	[19 42]
820[1 820]	[4 205]	[5 164]	[20 41]	840[1 840]	840[3 280]
840[5 168]	840[7 120]	840[8 105]	840[15 56]	840[21 40]	840[24 35]
858[1 858]	[3 286]	858[2 429]	[6 143]	858[11 78]	[26 33]
858[13 66]	[22 39]	870[1 870]	[6 145]	870[2 435]	[3 290]
870[5 174]	[29 30]	870[10 87]	[15 58]	897[1 897]	[13 69]
897[3 299]	[23 39]	900[1 900]	[4 225]	[9 100]	[25 36]
910[1 910]	[14 65]	910[2 455]	[7 130]	910[5 182]	[13 70]
910[10 91]	[26 35]	912[1 912]	[16 57]	912[3 304]	[19 48]
1008[1 1008]	[9 112]	1008[7 144]	[16 63]	1012[1 1012]	[4 253]
1012[11 92]	[23 44]	1045[1 1045]	[5 209]	1045[11 95]	[19 55]
1092[1 1092]	[4 273]	1092[3 364]	[12 91]	1092[7 156]	[28 39]
1092[13 84]	[21 52]	1110[1 1110]	[10 111]	1110[2 555]	[5 222]
1110[3 370]	[30 37]	1110[6 185]	[15 74]	1122[1 1122]	[33 34]
1122[2 561]	[17 66]	1122[3 374]	[11 102]	1122[6 187]	[22 51]
1170[1 1170]	[9 130]	1170[2 585]	[18 65]	1170[5 234]	[26 45]
1170[10 117]	[13 90]	1197[1 1197]	[9 133]	1197[7 171]	[19 63]
1288[1 1288]	[8 161]	1288[7 184]	[23 56]	1290[1 1290]	[10 129]
1290[2 645]	[5 258]	1290[3 430]	[30 43]	1290[6 215]	[15 86]
1302[1 1302]	[7 186]	1302[2 651]	[14 93]	1302[3 434]	[21 62]
1302[6 217]	[31 42]	1320[1 1320]	1320[3 440]	1320[5 264]	1320[8 165]

1320[11 120]	1320[15 88]	1320[24 55]	1320[33 40]	1332[1 1332]	[4 333]
[9 148]	[36 37]	1365[1 1365]	1365[3 455]	1365[5 273]	1365[7 195]
1365[13 105]	1365[15 91]	1365[21 65]	1365[35 39]	1380[1 1380]	[4 345]
1380[3 460]	[12 115]	1380[5 276]	[20 69]	1380[15 92]	[23 60]
1428[1 1428]	[4 357]	1428[3 476]	[12 119]	1428[7 204]	[28 51]
1428[17 84]	[21 68]	1540[1 1540]	[4 385]	1540[5 308]	[20 77]
1540[7 220]	[28 55]	1540[11 140]	[35 44]	1582[1 1582]	[2 791]
[7 226]	[14 113]	1590[1 1590]	[6 265]	[10 159]	[15 106]
1590[2 795]	[3 530]	[5 318]	[30 53]	1677[1 1677]	[13 129]
1677[3 559]	[39 43]	1680[1 1680]	[16 105]	1680[3 560]	[35 48]
1680[5 336]	[21 80]	1680[7 240]	[15 112]	1705[1 1705]	[5 341]
1705[11 155]	[31 55]	1710[1 1710]	[9 190]	1710[2 855]	[18 95]
1710[5 342]	[38 45]	1710[10 171]	[19 90]	1752[1 1752]	[24 73]
1752[3 584]	[8 219]	1768[1 1768]	[17 104]	1768[8 221]	[13 136]
1780[1 1780]	[4 445]	[5 356]	[20 89]	1785[1 1785]	[21 85]
1785[3 595]	[7 255]	1785[5 357]	[17 105]	1785[15 119]	[35 51]
1848[1 1848]	1848[3 616]	1848[7 264]	1848[8 231]	1848[11 168]	1848[21 88]
1848[24 77]	1848[33 56]	1870[1 1870]	[34 55]	1870[2 935]	[17 110]
1870[5 374]	[11 170]	1870[10 187]	[22 85]	1885[1 1885]	[29 65]
1885[5 377]	[13 145]	1918[1 1918]	[2 959]	[7 274]	[14 137]
2002[1 2002]	[22 91]	2002[2 1001]	[11 182]	2002[7 286]	[13 154]
2002[14 143]	[26 77]	2020[1 2020]	[4 505]	[5 404]	[20 101]
2088[1 2088]	[9 232]	2088[8 261]	[29 72]	2100[1 2100]	[4 525]
[21 100]	[25 84]	2100[3 700]	[7 300]	[12 175]	[28 75]
2170[1 2170]	[14 155]	2170[2 1085]	[7 310]	2170[5 434]	[31 70]
2170[10 217]	[35 62]	2277[1 2277]	[9 253]	2277[11 207]	[23 99]
2310[1 2310]	[15 154]	2310[2 1155]	[30 77]	2310[3 770]	[5 462]
2310[6 385]	[10 231]	2310[7 330]	[22 105]	2310[11 210]	[14 165]
2310[21 110]	[35 66]	2310[33 70]	[42 55]	2520[1 2520]	[9 280]
2520[5 504]	[45 56]	2520[7 360]	[40 63]	2520[8 315]	[35 72]
2542[1 2542]	[2 1271]	[31 82]	[41 62]	2632[1 2632]	[8 329]
2632[7 376]	[47 56]	2730[1 2730]	[30 91]	2730[2 1365]	[15 182]
2730[3 910]	[10 273]	2730[5 546]	[6 455]	2730[7 390]	[13 210]
2730[14 195]	[26 105]	2730[21 130]	[39 70]	2730[35 78]	[42 65]
2790[1 2790]	[9 310]	[10 279]	[31 90]	2790[2 1395]	[5 558]
[18 155]	[45 62]	2832[1 2832]	[16 177]	2832[3 944]	[48 59]
2850[1 2850]	[6 475]	[19 150]	[25 114]	2850[2 1425]	[3 950]

[38 75]	[50 57]	3060[1 3060]	[4 765]	[9 340]	[36 85]
3060[5 612]	[17 180]	[20 153]	[45 68]	3108[1 3108]	[4 777]
[21 148]	[37 84]	3108[3 1036]	[7 444]	[12 259]	[28 111]
3172[1 3172]	[4 793]	[13 244]	[52 61]	3465[1 3465]	[9 385]
3465[5 693]	[45 77]	3465[7 495]	[55 63]	3465[11 315]	[35 99]
3480[1 3480]	[24 145]	3480[3 1160]	[8 435]	3480[5 696]	[29 120]
3480[15 232]	[40 87]	3502[1 3502]	[2 1751]	[17 206]	[34 103]
3570[1 3570]	[51 70]	3570[2 1785]	[35 102]	3570[3 1190]	[17 210]
3570[5 714]	[14 255]	3570[6 595]	[34 105]	3570[7 510]	[10 357]
3570[15 238]	[42 85]	3570[21 170]	[30 119]	3588[1 3588]	[4 897]
[13 276]	[52 69]	3588[3 1196]	[12 299]	[23 156]	[39 92]
3600[1 3600]	[9 400]	[16 225]	[25 144]	3640[1 3640]	[56 65]
3640[5 728]	[13 280]	3640[7 520]	[8 455]	3640[35 104]	[40 91]
3850[1 3850]	[11 350]	[14 275]	[25 154]	3850[2 1925]	[7 550]
[22 175]	[50 77]	4180[1 4180]	[4 1045]	[5 836]	[20 209]
4180[11 380]	[19 220]	[44 95]	[55 76]	4305[1 4305]	[21 205]
4305[3 1435]	[7 615]	4305[5 861]	[41 105]	4305[15 287]	[35 123]
4368[1 4368]	[16 273]	4368[3 1456]	[48 91]	4368[7 624]	[39 112]
4368[13 336]	[21 208]	4488[1 4488]	[33 136]	4488[3 1496]	[11 408]
4488[8 561]	[17 264]	4488[24 187]	[51 88]	4680[1 4680]	[9 520]
4680[5 936]	[45 104]	4680[8 585]	[65 72]	4680[13 360]	[40 117]
4788[1 4788]	[4 1197]	[9 532]	[36 133]	4788[7 684]	[19 252]
[28 171]	[63 76]	4810[1 4810]	[10 481]	[26 185]	[65 74]
4810[2 2405]	[5 962]	[13 370]	[37 130]	4830[1 4830]	[46 105]
4830[2 2415]	[23 210]	4830[3 1610]	[35 138]	4830[5 966]	[21 230]
4830[6 805]	[69 70]	4830[7 690]	[15 322]	4830[10 483]	[42 115]
4830[14 345]	[30 161]	5160[1 5160]	[40 129]	5160[3 1720]	[43 120]
5160[5 1032]	[8 645]	5160[15 344]	[24 215]	5460[1 5460]	[4 1365]
5460[3 1820]	[12 455]	5460[5 1092]	[20 273]	5460[7 780]	[28 195]
5460[13 420]	[52 105]	5460[15 364]	[60 91]	5460[21 260]	[65 84]
5460[35 156]	[39 140]	5520[1 5520]	[16 345]	5520[3 1840]	[48 115]
5520[5 1104]	[69 80]	5520[15 368]	[23 240]	5910[1 5910]	[6 985]
[10 591]	[15 394]	5910[2 2955]	[3 1970]	[5 1182]	[30 197]
6160[1 6160]	[16 385]	6160[5 1232]	[77 80]	6160[7 880]	[55 112]
6160[11 560]	[35 176]	6402[1 6402]	[3 2134]	[22 291]	[66 97]
6402[2 3201]	[6 1067]	[11 582]	[33 194]	6678[1 6678]	[7 954]
[9 742]	[63 106]	6678[2 3339]	[14 477]	[18 371]	[53 126]

6708[1 6708]	[4 1677]	[13 516]	[52 129]	6708[3 2236]	[12 559]
[39 172]	[43 156]	6820[1 6820]	[4 1705]	[5 1364]	[20 341]
6820[11 620]	[31 220]	[44 155]	[55 124]	6840[1 6840]	[9 760]
6840[5 1368]	[45 152]	6840[8 855]	[72 95]	6840[19 360]	[40 171]
7137[1 7137]	[9 793]	[13 549]	[61 117]	7140[1 7140]	[4 1785]
[21 340]	[84 85]	7140[3 2380]	[7 1020]	[12 595]	[28 255]
7140[5 1428]	[17 420]	[20 357]	[68 105]	7140[15 476]	[35 204]
[51 140]	[60 119]	7540[1 7540]	[4 1885]	[29 260]	[65 116]
7540[5 1508]	[13 580]	[20 377]	[52 145]	8710[1 8710]	[10 871]
[26 335]	[65 134]	8710[2 4355]	[5 1742]	[13 670]	[67 130]
9108[1 9108]	[4 2277]	[9 1012]	[36 253]	9108[11 828]	[23 396]
[44 207]	[92 99]	11713[1 11713]	[13 901]	[17 689]	[53 221]
13398[1 13398]	[22 609]	[42 319]	[58 231]	13398[2 6699]	[11 1218]
[21 638]	[29 462]	13398[3 4466]	[14 957]	[66 203]	[77 174]
13398[6 2233]	[7 1914]	[33 406]	[87 154]	13860[1 13860]	[4 3465]
[9 1540]	[36 385]	13860[5 2772]	[20 693]	[45 308]	[77 180]
13860[7 1980]	[28 495]	[55 252]	[63 220]	13860[11 1260]	[35 396]
[44 315]	[99 140]	16830[1 16830]	[9 1870]	[34 495]	[55 306]
16830[2 8415]	[17 990]	[18 935]	[110 153]	16830[5 3366]	[11 1530]
[45 374]	[99 170]	16830[10 1683]	[22 765]	[85 198]	[90 187]
17220[1 17220]	[4 4305]	[21 820]	[84 205]	17220[3 5740]	[7 2460]
[12 1435]	[28 615]	17220[5 3444]	[20 861]	[41 420]	[105 164]
17220[15 1148]	[35 492]	[60 287]	[123 140]	18018[1 18018]	[9 2002]
[22 819]	[91 198]	18018[2 9009]	[11 1638]	[18 1001]	[99 182]
18018[7 2574]	[13 1386]	[63 286]	[117 154]	18018[14 1287]	[26 693]
[77 234]	[126 143]	19240[1 19240]	[40 481]	[65 296]	[104 185]
19240[5 3848]	[8 2405]	[13 1480]	[37 520]	19320[1 19320]	[105 184]
19320[3 6440]	[35 552]	19320[5 3864]	[21 920]	19320[7 2760]	[15 1288]
19320[8 2415]	[23 840]	19320[24 805]	[69 280]	19320[40 483]	[115 168]
19320[56 345]	[120 161]	23142[1 23142]	[7 3306]	[57 406]	[58 399]
23142[2 11571]	[14 1653]	[29 798]	[114 203]	23142[3 7714]	[19 1218]
[21 1102]	[133 174]	23142[6 3857]	[38 609]	[42 551]	[87 266]
28548[1 28548]	[4 7137]	[9 3172]	[13 2196]	[36 793]	[52 549]
[61 468]	[117 244]	46852[1 46852]	[4 11713]	[13 3604]	[17 2756]
[52 901]	[53 884]	[68 689]	[212 221]	51870[1 51870]	[30 1729]
[39 1330]	[130 399]	51870[2 25935]	[15 3458]	[65 798]	[78 665]
51870[3 17290]	[10 5187]	[13 3990]	[133 390]	51870[5 10374]	[6 8645]

[26 1995]	[195 266]	51870[7 7410]	[57 910]	[190 273]	[210 247]
51870[14 3705]	[95 546]	[105 494]	[114 455]	51870[19 2730]	[21 2470]
[70 741]	[91 570]	51870[35 1482]	[38 1365]	[42 1235]	[182 285]
55440[1 55440]	[9 6160]	[16 3465]	[144 385]	55440[5 11088]	[45 1232]
[77 720]	[80 693]	55440[7 7920]	[55 1008]	[63 880]	[112 495]
55440[11 5040]	[35 1584]	[99 560]	[176 315]		

genus 636

class 1270

check 1230000

(付表 3)

1[1 1 1]	2[1 1 2]	3[1 1 3]	4[1 1 4]	4[1 2 2]	5[1 1 5]
6[1 1 6]	6[1 2 3]	8[1 1 8]	8[1 2 4]	9[1 1 9]	9[1 3 3]
10[1 2 5]	12[1 1 12]	12[1 2 6]	12[1 3 4]	12[2 2 3]	14[1 1 14]
[1 2 7]	16[1 2 8]	16[1 4 4]	18[1 3 6]	18[2 3 3]	20[1 1 20]
[1 4 5]	20[1 2 10]	21[1 1 21]	24[1 1 24]	24[1 2 12]	[2 3 4]
24[1 4 6]	25[1 5 5]	27[1 3 9]	28[1 2 14]	[2 2 7]	30[1 1 30]
[2 3 5]	30[1 3 10]	32[1 2 16]	32[1 4 8]	36[1 1 36]	[1 4 9]
36[1 3 12]	36[1 6 6]	36[2 3 6]	36[3 3 4]	40[1 2 20]	[2 4 5]
40[1 5 8]	48[1 4 12]	48[2 3 8]	48[3 4 4]	50[1 5 10]	54[1 3 18]
54[1 6 9]	54[2 3 9]	56[1 2 28]	[1 4 14]	[2 4 7]	60[1 6 10]
[2 2 15]	60[2 5 6]	63[3 3 7]	64[1 8 8]	72[1 6 12]	[3 4 6]
72[2 3 12]	72[3 3 8]	80[1 2 40]	[1 8 10]	80[1 4 20]	[4 4 5]
81[1 9 9]	84[1 1 84]	[1 4 21]	90[1 3 30]	90[1 6 15]	[3 3 10]
96[1 4 24]	96[1 6 16]	98[1 7 14]	[2 7 7]	100[1 5 20]	[4 5 5]
100[2 5 10]	108[1 3 36]	[3 4 9]	108[1 6 18]	108[1 9 12]	108[2 3 18]
108[2 6 9]	120[1 4 30]	[2 3 20]	[2 5 12]	120[1 10 12]	[3 4 10]
125[1 5 25]	128[1 8 16]	144[1 4 36]	[4 4 9]	144[1 6 24]	144[1 12 12]
144[3 4 12]	147[3 7 7]	150[1 10 15]	[5 5 6]	150[2 5 15]	160[1 8 20]
[4 5 8]	180[2 3 30]	[5 6 6]	180[2 6 15]	189[1 9 21]	192[3 8 8]
196[1 14 14]	[2 7 14]	200[1 5 40]	200[1 10 20]	[4 5 10]	216[1 6 36]
[4 6 9]	216[1 9 24]	216[1 12 18]	[3 4 18]	216[2 3 36]	[2 9 12]

252[3 3 28]	[3 7 12]	270[1 3 90]	[3 9 10]	288[2 3 48]	288[3 8 12]
300[2 5 30]	[3 10 10]	300[1 10 30]	320[1 8 40]	324[1 9 36]	[4 9 9]
336[1 4 84]	[4 4 21]	360[1 12 30]	[3 4 30]	360[1 6 60]	[3 10 12]
[4 6 15]	384[1 16 24]	392[1 14 28]	[2 7 28]	[4 7 14]	400[1 20 20]
[4 5 20]	400[2 5 40]	[5 8 10]	432[1 12 36]	[4 9 12]	432[2 3 72]
[3 8 18]	432[3 4 36]	441[1 21 21]	450[2 15 15]	[3 5 30]	450[5 6 15]
500[1 5 100]	[1 20 25]	[4 5 25]	540[2 6 45]	[5 6 18]	576[1 24 24]
588[3 7 28]	[7 7 12]	600[1 10 60]	[4 10 15]	[5 6 20]	600[2 5 60]
[2 15 20]	756[1 9 84]	[1 21 36]	[4 9 21]	800[1 20 40]	[4 5 40]
864[1 6 144]	[6 9 16]	864[1 24 36]	[4 9 24]	900[1 30 30]	[6 10 15]
900[3 10 30]	1008[3 12 28]	[7 12 12]	1080[1 12 90]	[3 4 90]	[3 10 36]
[9 10 12]	1152[3 8 48]	1296[1 36 36]	[4 9 36]	1323[3 7 63]	1350[2 15 45]
[5 15 18]	1600[5 8 40]	1728[3 8 72]	1764[1 21 84]	[4 21 21]	1800[2 15 60]
[3 20 30]	[5 12 30]	1800[5 6 60]	[6 15 20]	2000[1 20 100]	[4 5 100]
[4 20 25]	2352[3 28 28]	[7 12 28]	2700[1 30 90]	[9 10 30]	3024[1 36 84]
[4 9 84]	[4 21 36]	3456[1 24 144]	[9 16 24]	5292[3 7 252]	[3 28 63]
[7 12 63]	5400[2 15 180]	[2 45 60]	[5 18 60]	[15 18 20]	7056[1 84 84]
[4 21 84]		21168[3 28 252]	[7 12 252]	[12 28 63]	

genus 149

class 232

(付表 4)

1[1 1 1 1]	2[1 1 1 2]	3[1 1 1 3]	4[1 1 1 4]	4[1 1 2 2]	5[1 1 1 5]
6[1 1 2 3]	8[1 1 1 8]	8[1 1 2 4]	8[1 2 2 2]	9[1 1 3 3]	12[1 1 2 6]
12[1 2 2 3]	16[1 1 4 4]	16[1 2 2 4]	20[1 1 1 20]	[1 1 4 5]	24[1 1 2 12]
[1 2 3 4]	24[1 2 2 6]	27[1 1 3 9]	27[1 3 3 3]	32[1 1 4 8]	32[1 2 2 8]
32[1 2 4 4]	36[1 1 6 6]	[2 2 3 3]	48[1 2 2 12]	[2 2 3 4]	48[1 2 4 6]
54[1 3 3 6]	64[1 4 4 4]	80[1 1 4 20]	[1 4 4 5]	81[1 3 3 9]	96[1 2 4 12]
[2 3 4 4]	108[1 3 6 6]	108[2 3 3 6]	125[1 5 5 5]	128[1 2 8 8]	128[1 4 4 8]
144[1 4 6 6]	[2 2 3 12]	216[1 3 6 12]	[3 3 4 6]	216[2 3 6 6]	243[1 3 9 9]
320[1 4 4 20]	[4 4 4 5]	432[1 6 6 12]	[3 4 6 6]	432[2 3 6 12]	500[1 5 5 20]
[4 5 5 5]	512[1 8 8 8]	864[1 6 12 12]	[3 4 6 12]	2000[1 5 20 20]	[4 5 5 20]
8000[1 20 20 20]	[4 5 20 20]				

genus 48

class 62